

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**  
Заведующий кафедрой  
математического анализа



**С.А. Шабров**  
подпись, расшифровка подписи  
17.04.2024 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.О.25 Методы оптимизаций**

*Код и наименование дисциплины в соответствии с учебным планом*

**1. Код и наименование направления подготовки/специальности:**

01.03.01 Математика

**2. Профиль подготовки/специализация:**

Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

**3. Квалификация выпускника:** Бакалавр

**4. Форма обучения:** Очная

**5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:** Кафедра математического анализа

**6. Составители программы:**

*(ФИО, ученая степень, ученое звание)*

Зверева Маргарита Борисовна, канд. физ-мат. наук, доцент

**7. Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол от 28.03.2024 № 0500-03

**8. Учебный год:** 2027-2028

**Семестр(ы):** 7

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины:

*Целями освоения учебной дисциплины являются:*

- подготовка студентов к восприятию математического аппарата специальных дисциплин, чтению специальной литературы;
- получение базовых знаний и формирование основных навыков по методам оптимизации, необходимых для решения задач, возникающих в практической деятельности;
- развитие логического мышления;
- формирование необходимого уровня математической подготовки для понимания других математических дисциплин.

*Задачи учебной дисциплины:*

- демонстрация на примерах математических понятий и методов сущности научного подхода, специфики математики, ее роли в развитии других наук;
- овладение студентами основными математическими понятиями методов оптимизации;
- выработка умений анализировать полученные результаты, решать типовые задачи, приобретение навыков работы со специальной математической литературой;
- формирование умений использовать математический аппарат для решения теоретических и прикладных задач.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина «Методы оптимизаций» относится к учебным дисциплинам блока 1 обязательной части программы бакалавриата направления 01.03.01 Математика.

Дисциплина «Методы оптимизаций» базируется на знаниях, полученных в рамках курсов «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения». Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения математических и естественнонаучных дисциплинах, модулях и практиках. Полученные знания могут быть использованы при продолжении образования в аспирантуре и в дальнейшей трудовой деятельности выпускников.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их	ОПК-1.1	ОПК-1.1 Применяет базовые знания, полученные в области математических и(или) естественных наук	Знать основные определения, понятия и идеи изучаемых разделов курса.  Уметь применять математический аппарат для решения поставленных задач, анализировать полученные результаты.  Владеть основными терминами и утверждениями, полученными в области изучаемого курса.

В профессиональной деятельности	ОПК-1.2	ОПК-1.2 Оценивает и формулирует актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики	Знать как использовать определения, понятия и идеи курса в профессиональной деятельности.  Уметь грамотно оценивать и формулировать значимые проблемы фундаментальной математики  Владеть основными терминами и утверждениями, полученными в области изучаемого курса.
	ОПК-1.3.	ОПК-1.3. Анализирует и применяет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	Знать методы решения задач профессиональной деятельности на основе полученных теоретических знаний.  Уметь анализировать и использовать методы решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний.  Владеть методами самостоятельного решения задач на основе теоретических знаний.
ОПК-2  Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.1	ОПК-2.1 Оценивает основные принципы математических моделей	Знать основные определения, понятия и идеи изучаемых разделов курса.  Уметь оценивать основные принципы математических моделей.  Владеть навыками оценивания основных принципов математических моделей.
	ОПК-2.2	ОПК-2.2 Выбирает необходимые методы исследования, модифицирует существующие и разрабатывает новые методы, исходя из задач конкретного исследования	Знать, как использовать определения, понятия и идеи курса в профессиональной деятельности.  Уметь выбирать необходимые методы исследования.  Владеть методами решения оптимальных задач.
	ОПК-2.3	ОПК-2.3 Применяет полученные результаты, представляет итоги проделанной работы	Знать, как применять определения, понятия и идеи курса в профессиональной деятельности.  Уметь представлять итоги проделанной работы  Владеть методами решения задач методов оптимизаций.

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.**(в соответствии с учебным планом) 4/144

**Форма промежуточной аттестации**(зачет/экзамен) **ЭКЗАМЕН**

### 13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы	Всего	По семестрам
		7 семестр
Контактная работа	56	56
в том числе:	лекции	28
	практические	28
	лабораторные	0
Самостоятельная работа	52	52
в том числе: курсовая работа (проект)		
Форма промежуточной аттестации <i>экзамен</i>	36	36
Итого:	144	144

#### 13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью он-лайн курса, ЭУМК
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Простейшая задача вариационного исчисления.	Теорема Ферма для функционала в линейном нормированном пространстве. Первая вариация. Уравнение Эйлера. Лемма Лагранжа. Частные случаи уравнения Эйлера. Задача о брахистохроне. Теорема Дю-Буа-Реймона. Гладкость экстремали в простейшей задаче вариационного исчисления.	Курс Методы оптимизаций (edu.vsu.ru)
1.2	Условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления	Условие Лежандра. Усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби. Вторая вариация. Теоремы Штурма. Условие, эквивалентное условию Якоби. Достаточные условия экстремума.	
1.3	Задачи вариационного исчисления	Функционал, зависящий от векторной функции. Задача Больца. Изопериметрическая задача. Уравнение Эйлера-Пуассона, Эйлера-Остроградского. Условный экстремум в задачах вариационного исчисления. Метод множителей Лагранжа. Задача с подвижной границей.	
1.4	Задачи линейного программирования	Экстремум линейного функционала на множестве в конечномерном пространстве. Графический метод решения задач линейного программирования. Симплексный метод. Теоремы двойственности. Транспортные задачи.	

1.5	Задачи оптимального управления	Постановка задачи оптимального управления. Принцип оптимальности. Принцип Беллмана динамического программирования. Уравнение Беллмана. Принцип максимума Понтрягина. Теорема о числе переключений. Метод решения задач без ограничения. Метод Ньютона. Методы сопряженных направлений. Численные методы решения задач оптимизации	
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Простейшая задача вариационного исчисления.	Уравнение Эйлера. Частные случаи уравнения Эйлера.	Курс Методы оптимизаций (edu.vsu.ru)
2.2	Условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления	Условие Лежандра. Усиленное условие Лежандра. Уравнение Якоби. Условие, эквивалентное условию Якоби. Достаточные условия экстремума.	
2.3	Задачи вариационного исчисления	Функционал, зависящий от векторной функции. Уравнение Эйлера-Пуассона. Условный экстремум в задачах вариационного исчисления. Метод множителей Лагранжа. Задача Больца.	
2.4	Задачи линейного программирования	Графический метод решения задач линейного программирования. Симплексный метод. Транспортные задачи.	
2.5	Задачи оптимального управления	Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.	

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (часов)					Всего
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Контроль	
1	Простейшая задача вариационного исчисления.	4	4	0	8	7	23
2	Условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления	6	6	0	11	7	30
3	Задачи вариационного исчисления	6	6	0	11	7	30
4	Задачи линейного программирования	6	6	0	11	7	30
5	Задачи оптимального управления	6	6	0	11	8	31
	Итого:	28	28	0	52	36	144

#### **14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины**

*(рекомендации обучающимся по освоению дисциплины: указание наиболее сложных разделов, работа с конспектами лекций, презентационным материалом, рекомендации по выполнению курсовой работы, по организации самостоятельной работы по дисциплине и др)*

Для обеспечения систематической и регулярной работы по изучению дисциплины и успешного прохождения аттестаций студентам рекомендуется придерживаться следующего порядка обучения:

1. Самостоятельно определить объем времени, необходимого для проработки каждой темы.
2. Регулярно изучать каждую тему дисциплины как по конспектам лекции, так и по рекомендованной литературе, используя различные формы индивидуальной работы.
3. Согласовывать с преподавателем виды работы по изучению дисциплины.
4. По завершении отдельных тем передавать выполненные работы (домашние задания) преподавателю.
5. При успешном прохождении рубежных контрольных испытаний студент может претендовать на сокращение программы промежуточной (итоговой) аттестации по дисциплине.

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

1. Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.
2. Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.
3. Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.
4. Для успешного и плодотворного обеспечения итогов самостоятельной работы разработаны учебно-методические указания к самостоятельной работе студентов над различными разделами дисциплины.
5. Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий

(практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки.

6. Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем.

**15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины** (список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов источников)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А.Б. Васильева [и др.] .— Изд. 3-е, испр. — СПб ; М. ; Краснодар : Лань, 2010 .
2	Морс М. Вариационное исчисление в целом / М. Морс ; пер. с англ. Л.Б. Вертгейма ; под ред. И.А. Тайманова .— М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований : Регулярная и хаотическая динамика, 2010 .
3	Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учебное пособие / И.Л. Акулич .— Изд. 3-е, стер. — Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2011 .
4	Аттетков А.В. Методы оптимизации : учебное пособие : [для студ. высш. учеб. заведений] / А.В. Аттетков, В.С. Зарубин, А.Н. Канатников .— Москва : РИОР : ИНФРА-М, 2013 .
5	Васильев Ф.П. Методы оптимизации : [учебник для студ. вузов, обуч. по специальности ВПО 010501 "Прикладная математика и информатика"] : [в 2 ч.] / Ф.П. Васильев .— Москва : Изд-во МЦНМО, 2011.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
6	Покорный Ю.В. Оптимальные задачи : [учебное пособие] / Ю.В. Покорный .— М. ; Ижевск : Регуляр. и хаотич. динамика : Ин-т компьютер. исслед., 2008 .
7	Покорный Ю.В. Краткий курс математической теории оптимальных задач. - Воронеж : ОАО "Центрально-Черноземное издательство", 2007.
8	Понтрягин Л.С. Принцип максимума в оптимальном управлении / Л.С. Понтрягин. - М. : Наука, 1989.
9	Ахиезер Н.И. Лекции по вариационному исчислению / Н.И. Ахиезер. - М. : Гостехиздат, 1955.
10	Галлеев Э.М. Краткий курс теории экстремальных задач / Э.М. Галлеев, В.М. Тихомиров. - М. : Изд-во МГУ, 1989.
11	Гельфанд И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. - М. : Физматлит, 1961.
12	Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление : учебник для физ. и физ.-мат. фак. ун-тов / Л. Э. Эльсгольц . - 4-е изд. - М. : Эдиториал УРСС, 2000.

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)\*:

№ п/п	Ресурс
13.	Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – ( <a href="http://www.lib.vsu.ru/">http // www.lib.vsu.ru/</a> )
14.	Электронный курс Методы оптимизаций ( <a href="http://edu.vsu.ru">edu.vsu.ru</a> )

\* Вначале указываются ЭБС, с которыми имеются договора у ВГУ, затем открытые электронно-образовательные ресурсы, онлайн-курсы, ЭУМК

**16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы** (учебно-методические рекомендации, пособия, задачки, методические указания по выполнению практических (контрольных) работ и др.)

№ п/п	Источник
1	Дидактический материал по вариационному исчислению / Ю.В. Покорный [и др.] - Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007.
2	Дидактический материал по методам оптимизации / Ю.В. Покорный [и др.] - Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007.

**17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ), электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):**

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (Курс Методы оптимизаций (edu.vsu.ru)).  
Перечень необходимого программного обеспечения: Mozilla Firefox (Mozilla Public License (MPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: <https://www.mozilla.org/en-US/MPL/>)

**18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:**

Учебная аудитория: специализированная мебель

**19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций**

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Простейшая задача вариационного исчисления.	ОПК-1 ОПК-2	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3 ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Промежуточная аттестация – экзамен, Контрольная работа 1, контрольно-измерительные материалы к экзамену
2	Условия экстремума в простейшей задаче вариационного исчисления	ОПК-1 ОПК-2	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3 ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Промежуточная аттестация – экзамен, Контрольная работа 1, контрольно-измерительные материалы к экзамену



3	Задачи вариационного исчисления	ОПК-1 ОПК-2	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3 ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Промежуточная аттестация – экзамен, Контрольная работа 1, контрольно-измерительные материалы к экзамену
4	Задачи линейного программирования	ОПК-1 ОПК-2	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3 ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Промежуточная аттестация – экзамен, Контрольная работа 2, контрольно-измерительные материалы к экзамену
5	Задачи оптимального управления	ОПК-1 ОПК-2	ОПК – 1.1, ОПК – 1.2, ОПК – 1.3 ОПК-2.1, ОПК-2.2, ОПК-2.3	Промежуточная аттестация – экзамен, Контрольная работа 2, контрольно-измерительные материалы к экзамену
Промежуточная аттестация Форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену.

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1 Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольная работа 1, контрольная работа 2.

### Примерный комплект заданий для контрольных работ Контрольная работа №1

#### Вариант 1

#### Задание 1.

Найдите допустимые экстремали для заданных функционалов:

$$\Phi(u) = \int_0^1 (u''^2) dx \quad u(0) = u'(0) = 0 \quad u(1) = u'(1) = 0$$

$$\Phi(u) = \int_{-1}^0 (12xu - u'^2) dx \quad u(-1) = 1 \quad u(0) = 0$$

#### Задание 2.

Исследуйте на слабый экстремум

$$\int_0^1 (x'^2 + 9x^2) dt \quad x(0)=x(1)=0$$

Составитель \_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева  
(подпись)

*Вариант 2*

Задание 1.

Найдите допустимые экстремали для заданных функционалов:

$$\Phi(u) = \int_a^b (u^2 + 2xuu') dx \quad u(a) = A \quad u(b) = B$$

$$\Phi(u) = \int_0^3 (360x^2u - u''^2) dx \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u(3) = 0, \quad u'(3) = 2.5$$

Задание 2.

Исследуйте на слабый экстремум

$$\int_1^2 (t^2 x'^2) dt \quad x(1)=3, \quad x(2)=1$$

Составитель \_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева  
(подпись)

## Контрольная работа №2

*Вариант 1*

Задание 1.

Решите задачу линейного быстрогодействия

$$\begin{cases} x_1' = 3u \\ x_2' = -x_1 \end{cases} \quad 0 \leq u \leq 2$$

Задание 2.

$$L = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max \text{ при ограничениях } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$x_1$  и  $x_2$  – целые.

Составитель \_\_\_\_\_  \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева  
(подпись)

*Вариант 2*

Задание 1.

Решите задачу линейного быстродействия

$$\begin{cases} x_1' = u \\ x_2' = x_1 - u \end{cases} \quad -1 \leq u \leq 3$$

Задание 2.

$$L = 2x_1 - 10x_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 - 5x_2 \geq -5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$L = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 9, \\ 3x_1 - 4x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$x_1$  и  $x_2$  – целые.



Составитель \_\_\_\_\_ (подпись) \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, контрольные работы.

Задание для текущего контроля и проведения промежуточной аттестации должны быть направлены *на оценивание*:

1. уровня освоения теоретических и практических понятий, научных основ профессиональной деятельности;
2. степени готовности обучающегося применять теоретические и практические знания и профессионально значимую информацию, сформированности когнитивных умений.
3. приобретенных умений, профессионально значимых для профессиональной деятельности.

**Текущий контроль** предназначен для проверки хода и качества формирования компетенций, стимулирования учебной работы обучаемых и совершенствования методики освоения новых знаний. Он обеспечивается проведением контрольных заданий и домашних работ, проверкой конспектов лекций, периодическим опросом слушателей на занятиях.

Формы, методы и периодичность текущего контроля определяет преподаватель.

При текущем контроле уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «зачтено» и «не зачтено».

### **Описание технологии проведения**

Тестирование и контрольные работы проводятся письменно.

### **Требование к выполнению заданий**

#### Контрольная работа

За контрольную работу ставится оценка «зачтено», в случае, если обучающийся выполнил:

- правильно в полном объеме все задания контрольной работы, показал отличные владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил все задания с небольшими неточностями и показал хорошие владения навыками применения полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала;

- обучающийся выполнил половину из предложенных заданий правильно, остальные с существенными неточностями и показал удовлетворительное владение навыками полученных знаний и умений при решении профессиональных задач в рамках усвоенного материала.

В остальных случаях обучающемуся ставится за контрольную работу «не зачтено».

## 20.2 Промежуточная аттестация

**Промежуточная аттестация** предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины. Промежуточная аттестация по дисциплине «Методы оптимизаций» проводится в форме экзамена.

### Перечень вопросов к экзамену:

1. Абстрактная теорема Ферма.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.
3. Лемма Лагранжа.
4. Первые интегралы в частных случаях уравнения Эйлера.
5. Задача о брахистохроне (с решением)
6. Теорема и лемма Дю-Буа-Реймона.
7. Гладкость экстремалей.
8. Задача Пуассона
9. Функционалы от векторных функций
10. Задача Остроградского
11. Задача Больца
12. Вторая вариация. Теорема о знаке второй вариации. Вторая вариация в простейшей задаче вариационного исчисления.
13. Теорема Лежандра.
14. Теорема Лежандра-Лагранжа
15. Условие Якоби
16. Неосцилляция уравнения Якоби
17. Теорема Штурма
18. Теорема о неосцилляции (об эквивалентных условиях)
19. Усиленная теорема Якоби
20. Достаточное условие слабого экстремума
21. Лемма об оценке «хвоста».
22. Теорема об экстремуме линейного функционала
23. Выпуклая оболочка. Теорема о выпуклой оболочке.
24. Критерий выпуклости.
25. Теорема о достижении экстремума в крайней точке.
26. Алгоритм симплексного метода
27. Постановка задачи оптимального управления.

28. Лемма 1 о сдвиге управления.
29. Лемма 2 о суперпозиции управлений.
30. Принцип оптимальности.
31. Уравнение Беллмана для задачи быстродействия.
32. Принцип максимума Понтрягина.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и завершает изучение дисциплины. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных профессиональных компетенций. На экзамене оценивается уровень освоения учебной дисциплины и степень сформированности компетенции определяются оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

### Описание технологии проведения

На экзамене студент вытягивает билет, который содержит два теоретических вопроса и четыре практических. Все вопросы и задачи, входящие в билеты, охватывают весь материал, изучаемый за весь семестр.

## Примерный комплект билетов для экзамена

Контрольно-измерительный материал № 1

1. Задача Больца
2. Экстремум линейного функционала
3. Выпишите уравнение и условия, которым должна удовлетворять точка минимума функционала
 
$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{u'^2}{2} dx + u(0) + u(1)$$
4. Возможен ли случай, когда экстремум линейного функционала достигается во внутренней точке компакта  $G$ ?
5. Выпишите уравнение и условия, которым должна удовлетворять точка минимума функционала
 
$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{u''^2}{2} dx - \int_0^1 u x dx, \quad u(0) = u'(0) = 0.$$
6. Решите симплексным методом

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$



Составитель \_\_\_\_\_ (подпись) \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева

Контрольно-измерительный материал № 2

1. Абстрактная теорема Ферма.

2. Уравнение Беллмана для задачи быстрого действия.

3. Выпишите первую вариацию функционала  $\Phi(u) = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)u'^2}{2} dx - \int_0^1 u dx$ ,

заданного на пространстве  $C^1[0,1]$

4. Распишите уравнение Беллмана для задачи  $x' = x + u$ ,  $|u| \leq 1$ , в  $R^1$ . Пусть  $T(x) = x^2$ .

5. Выпишите уравнение и условия, которым должна удовлетворять точка минимума функционала

$$\Phi(u) = \int_0^1 \frac{(x^2 + 1)u'^2}{2} dx, \quad u(0) = u'(0) = 0, \quad u(1) = 0.$$

6. Решите симплексным методом

$$x_1 - x_2 - x_3 + 6x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$



Составитель \_\_\_\_\_ (подпись) \_\_\_\_\_ М.Б. Зверева

Критерии выставления оценок:

Оценки	Критерии
Отлично	обучающийся показывает высокий интеллектуальный и общекультурный уровень, глубокое и всестороннее знание предмета, на все вопросы билета даны правильные исчерпывающие ответы, приведены доказательства обучающийся аргументировано и логично излагает материал, правильно решает все предложенные практические задания; дополнительные вопросы не вызывают затруднений
Хорошо	обучающийся показывает свой интеллектуальный и общекультурный уровень, твердо знает предмет учебной дисциплины, логично излагает изученный материал, умеет применять теоретические знания для решения практических задания, на вопросы билеты получены полные и верные ответы, приведено доказательство, но есть небольшие неточности в формулировках и затруднения при ответе на дополнительные вопросы
Удовлетворительно	обучающийся показывает свой общекультурный уровень, в основном знает предмет учебной дисциплины, знает основные определения и термины, имеет определенные знания предмета, практические задания решить не может, также не может привести доказательства.
Неудовлетворительно	степень освоения учебной дисциплины обучаемым не соответствует критериям, предъявляемым к оценке «удовлетворительно»

**20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ**

1) закрытые задания (тестовые, средний уровень сложности):

**Задание 1** Первая вариация функционала  $\Phi(x)$  определяется как

А  $\frac{d^2}{d\lambda^2} \Phi(x + \lambda h)$  при  $\lambda = 0$

Б  $\frac{d}{d\lambda} \Phi(x + \lambda h)$  при  $\lambda = 0$

В  $\frac{d}{d\lambda} \Phi(x + \lambda h)$  при  $\lambda = 1$

**Задание 2**



Пусть имеется три поставщика однородного товара с запасами 40, 25, 35 ед. и три потребителя этого товара с потребностями в количестве 50, 30, 20 ед. соответственно. Стоимости перевозок единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей тарифов ( в ден. ед.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти план перевозок с минимальной стоимостью. Выбрать, к какому типу относится эта задача

- А Задача динамического программирования
- Б Задача линейного программирования
- В Задача выпуклого программирования
- Г Задача нелинейного программирования

### Задание 3

Выпишите уравнения Эйлера для функционала  $\Phi(x) = \int_0^1 (x'^2 - x^2) dt$ ,  $x(0) = x(1) = 0$

- А  $x'' + x = 0$
- Б  $x'' - x = 0$
- В  $x'' + 2x = 0$

### Задание 4

Выпишите вторую вариацию для функционала  $\Phi(x) = \int_0^1 (x'^2 - x^2) dt$ ,  $x(0) = x(1) = 0$

- А  $\int_0^1 (2h'^2 - 2h^2) dt$ ,  $h(0) = h(1) = 0$
- Б  $\int_0^1 (2h'^2 + 2h^2) dt$ ,  $h(0) = h(1) = 0$
- В  $\int_0^1 (h'^2 + 2h^2) dt$ ,  $h(0) = h(1) = 0$

### Задание 5

В суточный рацион включают два продукта питания  $P_1$  и  $P_2$ , причем продукта  $P_1$  должно войти в рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта  $P_1$  составляет 2 руб., продукта  $P_2$  – 4 руб. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице. Определить рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		$P_1$	$P_2$
$A$	120	0,2	0,2
$B$	160	0,4	0,2

Решение может быть найдено с помощью:

- А. Графического метода
- Б. Метода потенциалов
- В. Симплексного метода
- Г. Метода минимального элемента
- Д. Метода северо-западного угла

### Задание 6

Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего  $19/3 \text{ м}^2$  площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 у.е., при этом она может купить оборудование 2 видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 у.е., 2-го вида – 3 у.е. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида – на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется  $2 \text{ м}^2$  площади, а для оборудования 2-го вида –  $1 \text{ м}^2$  площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции.

К какому типу задач относится данная?

- А. Задача целочисленного программирования
- Б. Задача выпуклого программирования
- В. Задача динамического программирования

### Задание 7

Найти максимум функционала  $L = 2x_1 + x_2$  при ограничениях

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 16, \\ x_{1,2} \geq 0. \end{cases}$$

А  $4\sqrt{5}$  Б. 5 В  $3\sqrt{5}$  Г. 0

### Задание 8

Вычислите значение допустимой экстремали в точке  $x=-0,5$  для функционала

$$\Phi(x) = \int_{-1}^0 (12tx - x'^2) dt, \quad x(-1) = 1, \quad x(0) = 0$$

А -0,125

Б -0,523

В -0,5

### 2) открытые задания (тестовые, повышенный уровень сложности):

#### Задание 1

Выберите верные утверждения

А. Множество  $G$  выпукло, если оно содержит свои крайние точки.

Б. Множество  $G$  выпукло тогда и только тогда, когда оно совпадает со своей выпуклой оболочкой.

В. Множество выпуклое, если с любой парой точек оно содержит отрезок, их соединяющий.

Г. Множество крайних точек является выпуклым.

#### Задание 2

Вычислите значение первой вариации функционала  $\int_0^1 x'^2 dt$  в точке  $x=t$  по направлению  $h=t$ .

#### Задание 3

Выпишите значение допустимой экстремали для функционала

$$\Phi(x) = \int_0^1 (x'^2 - x^2) dt, \quad x(0) = x(1) = 0 \quad \text{в точке } x=0,5$$

#### Задание 4

Выпишите значение допустимой экстремали функционала  $\int_0^1 (720t^2x - x''^2) dt$ ,  $x(0)=0$ ,  $x'(0)=1$ ,  $x(1)=0$ ,  $x'(1)=2,5$  в точке  $t=0,5$

### Задание 5

Будет ли функционал  $\Phi(h) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h'^2 - h^2) dt$ ,  $h(0) = 0 = h(\frac{\pi}{2})$  неотрицательным?

### Задание 6

Будет ли уравнение

$-((t^2 + 5)u')' + (\sin t + 7)u = 0$  неосциллировать на  $[0,1]$ ?

### Задание 7

Установите соответствие между типом задачи и наиболее часто применяемым методом ее решения

1. Задача линейного программирования
2. Задача целочисленного программирования
3. Транспортная задача
4. Задача динамического программирования

А. Метод Беллмана

Б. Симплексный метод

В. Метод Гомори

Г. Метод потенциалов

### Задание 8

Пусть имеется три поставщика однородного товара с запасами 40, 25, 35 ед. и три потребителя этого товара с потребностями в количестве 50, 30, 20 ед. соответственно. Стоимости перевозок единицы товара от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей тарифов ( в ден. ед.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти план перевозок с минимальной стоимостью.

Оптимальный план перевозок может быть найден с помощью:

А. Графического метода

Б. Метода потенциалов

В. Симплексного метода

Г. Метода минимального элемента

Д. Метода северо-западного угла

**Задание 9**

В суточный рацион включают два продукта питания  $P_1$  и  $P_2$ , причем продукта  $P_1$  должно войти в рацион не более 200 ед. Стоимость 1 ед. продукта  $P_1$  составляет 2 руб., продукта  $P_2$  – 4 руб. Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта, минимальные нормы потребления указаны в таблице. Определить рацион питания, стоимость которого будет наименьшей.

Питательные вещества	Минимальная норма потребления	Содержание питательных веществ в 1 ед. продукта	
		$P_1$	$P_2$
$A$	120	0,2	0,2
$B$	160	0,4	0,2

В ответ написать, сколько единиц продукта  $P_2$  должно войти в оптимальный рацион

**Задание 10.** Решить задачу. В ответе указать минимальное значение функционала

$$L = 4x_1 + 6x_2 \rightarrow \min \text{ при ограничениях } \begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Задание 11**

Для улучшения финансового положения фирма приняла решение об увеличении выпуска конкурентоспособной продукции, для чего принято решение об установке в одном из цехов дополнительного оборудования, занимающего  $19/3 \text{ м}^2$  площади. На приобретение дополнительного оборудования фирма выделила 10 у.е., при этом она может купить оборудование 2 видов. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида стоит 1 у.е., 2-го вида – 3 у.е. Приобретение одного комплекта оборудования 1-го вида позволяет увеличить выпуск продукции в смену на 2 шт., а одного комплекта оборудования 2-го вида – на 4 шт. Зная, что для установки одного комплекта оборудования 1-го вида требуется  $2 \text{ м}^2$  площади, а для оборудования 2-го вида –  $1 \text{ м}^2$  площади, определить такой набор дополнительного оборудования, который дает возможность максимально увеличить выпуск продукции. В ответе указать оптимальное число комплектов оборудования 2 вида.

### Задание 12

Найти максимум функции  $F = 5x_1 + 2x_2 + x_3$  при условиях неотрицательности переменных и условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 6, \\ x_2 + x_3 \leq 4, \\ 3x_1 + x_2 \leq 7. \end{cases}$$

В ответе указать оптимальное значение целевой функции, округлив результат до сотых

### Задание 13

Укажите оптимальное значение целевой функции для задачи, двойственной к приведенной

$$x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \leq 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \leq 6 \\ x_j \geq 0 \quad j = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

### Задание 14

Составить оптимальный план перевозки электрооборудования от трех поставщиков с грузами 240, 40, 110 ед. к четырем населенным пунктам с запросами 90, 190, 40 и 130 т. Стоимости перевозок единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю заданы матрицей

$$\begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нужно составить план перевозок с минимальной стоимостью. Выписать в ответ минимальную стоимость перевозок.

### Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

**Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).**